

ДЕРБІСАЛЫ БАУЫРЖАН ОҢТАЛАПУЛЫ

ФУНКЦИЯ ГРИНА НЕСИММЕТРИЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ
НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности «6D060100-Математика»

Актуальность темы исследования. В настоящей диссертации мы исследуем задачу о построении функции Грина для краевых задач для гиперболического уравнения. Функция Грина для гиперболических задач существенно отличается от функций Грина задач для уравнений эллиптического и параболического типа.

Для задач для уравнений эллиптического и параболического типа можно показать, что разность двух функций Грина

$$g(x, y) = G_Q(x, y) - G_P(x, y)$$

является уже «более гладкой» функцией и является решением однородного уравнения

$$L g(x, y) = 0, \quad x, y \in \Omega.$$

Однако, для задач для уравнений гиперболического типа это уже не так. Функция $g(x, y)$ также может иметь особенности такого же порядка, как и функции Грина $G_Q(x, y)$ и $G_P(x, y)$.

Таким образом, если для задач для уравнений эллиптического и параболического типа функция Грина может быть представлена в виде суммы «главной части с особенностью» и «гладкого слагаемого»

$$G_P(x, y) = G_Q(x, y) - g(x, y),$$

то для гиперболических краевых задач это уже не так. Этот факт существенно усложняет рассмотрение и поэтому для каждого отдельного случая краевых задач требуется отдельное исследование.

Цель диссертационной работы обоснование метода функции Грина для несимметричных характеристических начально-краевых задач для гиперболического уравнения в характеристическом треугольнике.

Для достижения цели диссертационной работы рассмотрены следующие основные задачи исследования:

- Построение функции Грина для первой начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка;

- Построение функции Грина для второй начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка;

- Построение функции Грина задачи Дарбу для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием первого рода на нехарактеристической границе;

- Построение функции Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием первого рода на нехарактеристической границе;

- Построение функции Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием второго рода на нехарактеристической границе;

- Построение примера корректной характеристической краевой задачи, имеющей «неклассический» вид функции Грина;

- Построение граничных условий объемного гиперболического потенциала в области с криволинейной границей.

Объект исследования общая гиперболическое уравнение второго порядка с переменными коэффициентами.

Методы научного исследования. В диссертации используются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории функций, теории потенциала, теории специальных функций и теории дифференциальной геометрии.

Научная новизна работы. Задачи, рассмотренные в настоящей диссертации, являются новыми.

Одним из наиболее значительных достижений в построении функции Грина характеристической краевой задачи была работа Haws L. Symmetric Green's functions for certain hyperbolic problems (1991). Он рассмотрел двумерное гиперболическое уравнение

$$u_{xy} + p(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma,$$

в характеристическом треугольнике $\Gamma = \{(x, y): 0 < x < y < 1\}$.

В качестве граничного условия на нехарактеристической линии AB было выбрано одно из следующих двух условий: либо граничное условие первого рода

$$u(x, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

или граничное условие второго рода

$$(u_x - u_y)(x, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

и было использовано условие в точке C :

$$u(0,1) = 0.$$

Задача была дополнена еще одним условием, обеспечивающим симметрию функции Грина рассматриваемой задачи. В качестве примера было предложено использовать самосопряженные граничные условия со смещением.

В общем случае задача была только сформулирована, но не решена. Для частного случая $p(x, y) \equiv 0$ было дано определение функции Грина и указан метод ее построения.

Автор также рассмотрел гиперболическое уравнение с коэффициентами более низкого порядка

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f(x, y), \quad (x, y) \in G.$$

Однако рассматривался только случай постоянных коэффициентов a, b, c .

Задача построения функции Грина характеристической краевой задачи с произвольными коэффициентами (без использования условия симметрии) была выделена как нерешенная задача, интересная для дальнейшего рассмотрения.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Исследования по теме носят, в основном, теоретический и фундаментальный характер. Их научная значимость обусловлена именно глубоким уровнем фундаментальности получаемых результатов.

Публикации. По результатам диссертации опубликовано 10 работ: 3 журнальные статьи (1 в журналах, индексируемых Scopus, и 3 в журнале, рекомендованном Комитетом по контролю в сфере образования и науки Министерства образования и науки Республики Казахстан), 4 работы в материалах международных научных конференциях (1 в Springer Proceedings).

Результаты по теме диссертации были опубликованы в следующих работах:

Публикация в рейтинговом научном журнале

1 M. A. Sadybekov, B. O. Derbissaly. On Green's function of Cauchy–Dirichlet problem for hyperbolic equation in a quarter plane // *Boundary Value Problems*. V. 69, 23 pp., 2021. Web of Science Impact factor=1,7(Q1), Scopus SJR=0,573 (Q1), CiteScore=3,5, Scopus Percentile=92

ККСОН

1 M. A. Sadybekov, B. O. Derbissaly. Boundary conditions of volume hyperbolic potential in a domain with curvilinear boundary // *Kazakh Mathematical Journal*. V. 19, № 4, P. 20-29, 2019.

2 M. A. Sadybekov, B. O. Derbissaly. On Green's function of Darboux problem for hyperbolic equation // *Bulletin of KazNU. Series of mathematics, mechanics, computer science*. V. 111, № 3, P. 79-94, 2021.

3 B. O. Derbissaly. On Green's function of the second Darboux problem for hyperbolic equation // *Bulletin of KazNU. Series of mathematics, mechanics, computer science*. V. 116, №4, P. 3-14, 2022.

Отечественное издание

1 M. A. Sadybekov, B. O. Derbissaly. On the Green function of the Cauchy–Neumann problem for the hyperbolic equation in the quarter plane // *Kazakh Mathematical Journal*. V. 21, № 1, P. 89-107, 2021.

Зарубежное издание

1 T. Sh. Kalmenov, B. O. Derbissaly. On the boundary conditions of the wave potential in a domain with curvilinear borders // *Reports of Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences*. V 19, № 1, P. 22-31, 2019.

Публикации в материалах международных конференций

1 M. A. Sadybekov, B. O. Derbissaly. Boundary conditions of the hyperbolic potential in a domain with curvilinear boundary // *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, V. 351, P. 257-271, 2021. Scopus SJR=0,253, Scopus Percentile=14

2 B. O. Derbissaly. On the Green function of the first initial-boundary problem of a hyperbolic equation in a quarter plane // Тезисы докладов: ежегодная научная апрельская конференция института математики и математического моделирования, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования. С. 39, 2020.

3 Б. О. Дербисалы. Краевые условия объемного гиперболического потенциала в области с криволинейной границей // Тезисы докладов: ежегодная научная апрельская конференция института математики и математического моделирования и Workshop «Problems of modelling processes in electrical contacts», посвященный 80-летию юбилею академика НАН РК Станислава Николаевича Харина. С. 55, 2019.

4 M. A. Sadybekov, B. O. Derbissaly. On Green's function of asymmetric characteristic boundary value problem for hyperbolic equation in a characteristic triangle // International Conference "Numerical Functional Analysis", 22-24 ноября, 2021, Istanbul, Turkey

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из титульного листа, содержания, введения, семи разделов, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 108 страниц с 68 ссылками на литературы.

Основное содержание диссертации. Введение содержит актуальность темы исследования, цели и задачи, основные положения для защиты диссертации, объект и предмет исследования, методы исследования, новизну и теоретическую и практическую значимость исследования, связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами, апробация работы, публикации автора, объем и структура диссертации и содержание.

В разделе 1, дано определение и обоснована методика построения функции Грина для первой начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка.

В разделе 2, дано определение и обоснована методика построения функции Грина для второй начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка.

В разделе 3, дано определение функции Грина задачи Дарбу для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием первого рода на нехарактеристической границе и дано обоснование методики её построения.

В разделе 4, дано определение функции Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием первого рода на нехарактеристической границе и дано обоснование методики её построения.

В разделе 5, дано определение функции Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием второго рода на нехарактеристической границе и дано обоснование методики её построения.

В разделе 6, построены примеры корректной характеристической краевой задачи, имеющей «неклассический» вид функции Грина.

В разделе 7, построена граничные условия объемного гиперболического потенциала в области с криволинейной границей.

В заключении представлены основные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационной работы.